L3, Alg

Classification des groupes d'ordre p^2

L 101
L 103
L 104
L 121

Proposition : Soit G un p-groupe, alors $|Z(G)| \geqslant p$.

Démonstration : On a $Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G,\ hg = gh\}$
$= \{g \in G : \forall h \in G,\ hgh^{-1} = g\}$

On fait agir le p-groupe G sur lui-même par conjugaison :

$G \times G \to G$
$(g, h) \mapsto hgh^{-1}$

On remarque que $g \in Z(G) \iff g \in G^G$ ie $G \cdot g = \{g\}$

Le cardinal d'une orbite divise l'ordre du groupe p^α,
donc $|G \cdot g| = 1$ ou $|G \cdot g| \equiv 0\ [p]$

D'après l'équation des classes, $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} |G \cdot g_i|$

$|G| \equiv |Z(G)|\ [p]$

d'où $|Z(G)| \equiv 0\ [p]$

Comme $1 \in Z(G)$, on a $|Z(G)| \geqslant p$.

Proposition : Soit G un groupe d'ordre p^2, alors G est abélien.

Comme $Z(G) < G$, on a d'après le th de Lagrange, $|Z(G)| \in \{1, p, p^2\}$

D'après le résultat précédent, on a $|Z(G)| \neq 1$.

Supposons $|Z(G)| = p$.

Soit $x \in G \setminus Z(G)$. On considère encore l'action de G sur G par conjugaison.

D'une part, $x \in G_x$, d'autre part $Z(G) \subset G_x$.

Ainsi $|G_x| \geqslant p+1$. Or par Lagrange, $|G_x| \mid p^2$ donc $G_x = G$

ie $x \in Z(G)$ $\lightning$.

Il reste donc $|Z(G)| = p^2 = |G|$, d'où $Z(G) = G$: G abélien

---

Théorème : Soit G un groupe d'ordre p^2,
alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou bien $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

Démonstration : Soit $x \in G$, on a $o(x) \in \{1, p, p^2\}$

1er cas : $\exists\, x \in G$ tq $o(x) = p^2$.

alors $G = \langle x \rangle$ est cyclique à p^2 éléments

Donc d'après la classification des groupes monogènes, $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

2ème cas : $\forall\, x \in G \setminus \{e\}$, $o(x) = p$.

Soit $x \in G$. On pose $N = \langle x \rangle$. On a $N \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Comme $|N| < |G|$, il existe $y \in G \setminus N$. On pose $H = \langle y \rangle \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On a : $N \lhd G$ et $H \lhd G$ comme G est commutatif

$N \cap H < H$ donc $|N \cap H| \in \{1, p\}$

Or l'inclusion est stricte car $y \in H$ et $y \notin N \cap H$

D'où $|N \cap H| = 1$ puis $N \cap H = \{e\}$

L'ensemble NH est un groupe (car G abélien)

De plus, $N \subset NH$ et $y \in NH$ d'où $|NH| \geqslant p+1$

puis $|NH| = p^2$ ainsi $G = NH$

D'après les ptés du produit direct, $G \simeq N \times H$

ainsi, $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$